# Banach-Tarskis paradox

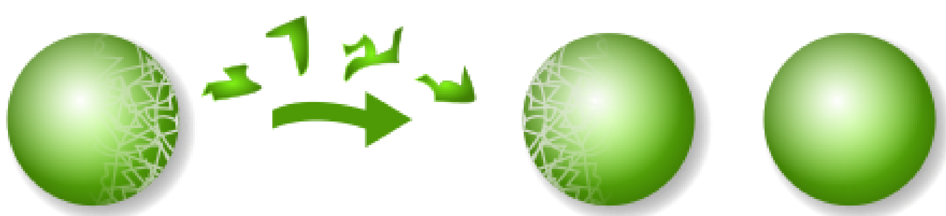
Tony Johansson
1MA239: Specialkurs i Matematik II
Uppsala Universitet

VT 2018

Banach-Tarskis paradox, bevisad 1924 och döpt efter Stefan Banach och Alfred Tarski, är en sats inom mängdlära och geometri som kort brukar sammanfattas som något i stil med följande:

*Ett klot i tre dimensioner*
*kan delas i ändligt många delar,*
*vilka kan pusslas ihop*
*till två separata klot,*
*vardera av samma storlek*
*som det ursprungliga.*

Denna sammanfattning brukar vara lite otillfredsställande, så därför brukar den ackompanjeras av en bild lik den i Figur 1. Fortfarande är det inte helt tydligt vad som menas matematiskt, och eftersom det låter så paradoxalt är det viktigt att vi definierar allting exakt så att vi har ett faktiskt matematiskt uttalande att ta ställning till.



Figur 1: Grafiskt försök att förklara vad Banach-Tarskis paradox säger.

Vi kommer definiera de begrepp som behövs för att kunna uttrycka Banach-Tarskis paradox mer precist. Vi kommer därefter diskutera paradoxens relevans i modern matematik.

# 1 Geometrisk kongruens

Först of främst, en detalj: jag kommer i detta dokument placera alla geometriska objekt i ett koordinatsystem, och vi kan se varje objekt som en mängd av punkter i $\mathbb{R}^n$, för ett för situationen lämpligt dimensionsantal $n$. Egentligen behövs inte koordinatsystem, men jag tror det underlättar för allas intuition om vi kan använda koordinater.

Vi börjar med att definiera exakt vad som menas med ett geometriskt objekt.

**Definition 1.** *Ett* geometriskt objekt *i $n$ dimensioner är en mängd $A$ av punkter i $\mathbb{R}^n$.*

Vi kan definiera mängder algebraiskt som till exempel,

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4x - 3\} \quad \text{(oändlig rät linje)},\\
B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \quad \text{(klot av radie 1)},\\
C &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < 1 \ \forall i\} \quad \text{(insidan av en hyperkub)},
\end{aligned}
$$

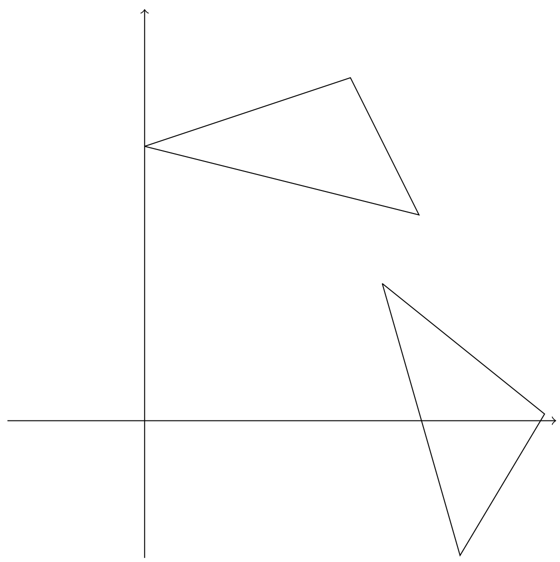
eller i ord,

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{linjesegmentet i } \mathbb{R}^2 \text{ mellan } (1, 4) \text{ och } (3, 1)\},\\
E &= \{\text{insidan av tetraedern i } \mathbb{R}^3 \text{ med hörnpunkter } P, Q, R, S\}.
\end{aligned}
$$

Oavsett hur vi definierar ett objekt så är det i grund och botten en mängd av punkter i $\mathbb{R}^n$. Framförallt spelar det ingen roll hur mängden beskrivs, utan så länge mängden av punkter är samma så pratar vi om samma objekt.

Att säga att två mängder $A, B$ är kongruenta är att säga att de ser likadana ut. I Figur 2 ser vi två trianglar som uppenbarligen är "lika" i någon mening, även om de inte är "lika med" varandra, eftersom de består av olika punktmängder. Vi säger att de är *kongruenta*. Kort sagt är två objekt $A, B$ kongruenta om $B$ kan flyttas, roteras och speglas på ett sätt att den till slut är samma mängd som $A$.

Nästa definition görs i termer av metriska rum, men vi kommer inte nämna metriska rum utanför definitionen, så ni kan tänka er att det metriska rummet är $\mathbb{R}^n$ med det Euklidiska avståndet.



Figur 2: Två kongruenta trianglar

**Definition 2.** *Låt $(S, d)$ vara ett metriskt rum. En funktion $f : S \to S$ är en* isometri *om den är bijektiv och bevarar avstånd, det vill säga*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

*för alla $x, y \in S$.*

I nästa definition använder vi standardbeteckningen för en funktion $f : S \to T$ (där $S, T$ kan vara vilka mängder som helst) och $A \subseteq S$ att

$$f(A) = \{y \in T : f(x) = y \text{ för något } x \in A\} \subseteq T.$$

**Definition 3.** *Två geometriska objekt $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ är* kongruenta *om det finns en isometri $f$ sådan att $f(A) = B$.*

Ordet isometri så som vi nu känner till det känns lite väl krångligt för våra syften. När vårt metriska rum är det Euklidiska rummet $(\mathbb{R}^n, |\ |)$ finns det inte så komplicerade isometrier, utan en isometri $f$ kan alltid skrivas som en kombination av translationer (förflyttningar), rotationer och reflektioner.

**Definition 4.** *Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$ vara en funktion.*

*(i) $f$ är en* translation *om det finns ett $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sådant att $f(x) = x + x_0$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$.*

*(ii)* *($n = 2$) $f$ är en* rotation *om det finns en punkt $x_0$ och en vinkel $\theta \in [0, 2\pi)$ sådan att vinkeln $\angle x x_0 f(x)$ är $\theta$ för alla $x \neq x_0$, och $f(x) = x$.*

*($n = 3$) $f$ är en* rotation *om det finns en axel (rät linje) $\ell$ och en vinkel $\theta$ sådant följande är sant för alla $x \in \mathbb{R}^3$. Om $\pi_x$ betecknar planet som innehåller $x$ och är ortogonalt mot $\ell$, och $y = \pi_x \cap \ell$ den gemensamma punkten mellan $\ell$ och $\pi_x$, så är $x, f(x), y \in \pi_x$ och de tre punkterna bildar vinkel $\theta$ vid $y$. Om $x \in \ell$ så är $f(x) = x$.*

*(iii)* *($n = 2$) $f$ är en* reflektion *om det finns en linje $\ell$ sådan att $f(x) = x$ för $x \in \ell$, och om $x \notin \ell$ så bryts linjesegmentet mellan $x$ och $f(x)$ på mitten av $\ell$, och linjesegmentet mellan $x$ och $f(x)$ skär $\ell$ ortogonalt.*

*($n = 3$) $f$ är en reflektion under samma omständigheter med linjen $\ell$ utbytt mot ett plan $\pi$.*

Det är känt att alla isometrier i Euklidisk geometri är kombinationer av translationer, rotationer och reflektioner, så vi kan förenkla Definition 3 som följer.

**Definition 5.** *Två geometriska objekt $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ är* kongruenta *om $A$ kan translateras, roteras och reflekteras så att den sammanfaller med $B$.*

## 2 Banach-Tarskis sats

När vi nu har definierat kongruens ordentligt kan vi nästan skriva ner Banach-Tarskis sats formellt. Vi behöver bara ett par definitioner till.

**Definition 6.** *Låt $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en mängd.*

*(i)* *$A$ är* begränsad *om det finns ett ändligt tal $D > 0$ sådant att $|x-y| \leq D$ för alla $x, y \in A$. (Bonusdefinition: det minsta tal $D$ för vilket detta är sant är mängdens* diameter.*)*

*(ii)* *En punkt $x \in A$ är i $A$:s* inre *om det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att $|x - y| \geq \varepsilon$ för alla $y \notin A$.*

*(iii)* *En* partition *av $A$ är en ändlig sekvens av mängder $A_1, \ldots, A_k$ sådan att $A_i \cap A_j = \emptyset$ när $i \neq j$, och $A_1 \cup \ldots A_k = A$.*

**Sats 1** (Banach-Tarski, 1924)**.** *Låt $A$ och $B$ vara två geometriska objekt i $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ som är (i) begränsade och (ii) har icke-tomt inre. Då finns ett ändligt heltal $k$ och partitioner $A = A_1 \cup \ldots A_k$, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ sådana att $A_i$ och $B_i$ är kongruenta för $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Banach-Tarskis paradox i den form vi nämnde den i början återfås om vi först definierar ett klot (med medelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ och en positiv reell radie $r$) som
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\},$$
och för tre punkter $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ låter
$$A = B(P, 1), \quad B = B(Q, 1) \cup B(R, 1).$$
Men Banach-Tarskis sats säger mer än "bara" att vi kan kopiera klot. Ibland uttrycks paradoxen som "en ärta kan pusslas om till en sol" eller "en myra kan pusslas om till en elefant", och så vidare.

# 3 Konsekvenser för volymberäkning

Banach-Tarskis paradox presenteras ofta i början av kurser i måtteori (även kallat integrationsteori). En grundläggande frågeställning inom måtteori är hur vi definierar volym olika godtyckliga metriska rum, likt hur vi generaliserade begreppet om avstånd i en tidigare del av kursen.

För en mängd $S$ låter vi $2^S$ (ibland skrivet $\mathcal{P}(S)$ från engelskans *power set*) beteckna mängden av delmängder till $S$, alltså
$$2^S = \mathcal{P}(S) = \{A : A \subseteq S\}.$$
Vi börjar med att låta $S = \mathbb{R}^n$ och försöker definiera en volymfunktion $\mu : 2^S \to \mathbb{R}$. Vi vill definitivt att vår volymfunktion ska uppfylla följande.

(i) (Positivitet) Om $A \in 2^S$ är en mängd med icke-tomt inre är $\mu(A) > 0$.

(ii) (Begränsad) Om $A \in 2^S$ är begränsad är $\mu(A) < \infty$.

(iii) (Additivitet) Om $A_1, \ldots, A_k \in 2^S$ är sådana att $A_i \cap A_j = \emptyset$ när $i \neq j$, så är
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

(iv) (Kongruensbevarande) Om $A, B \in 2^S$ är kongruenta så är $\mu(A) = \mu(B)$.

Men Banach-Tarskis sats innebär att ingen sådan funktion kan finnas. Vi kan låta $A, B$ vara två begränsade mängder med icke-tomt inre och $\mu(A) \neq \mu(B)$, till exempel $A = B(0,1)$ och $B = B(0,2)$. Genom att kombinera positivitet och addititivet ser vi att

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) > \mu(A).$$

Men Banach-Tarskis sats säger att det finns partitioner $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k, B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ sådana att

$$\mu(A) < \mu(B) = \mu(B_1 \cup \cdots \cup B_k) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) = \mu(A),$$

vilket bara kan uppfyllas om $\mu(A) = \infty$, vilket vi inte vill.

Så ingen volymfunktion kan uppfylla kraven vi ställde ovan. Något måste bort, men vilket? Det är lite av en kuggfråga, eftersom svaret inte är något av (i) – (iv), utan istället kravet $\mu : 2^S \to \mathbb{R}$. Slutsatsen vi drar från Banach-Tarski är att det inte existerar någon måttfunktion som kan mäta volym på *varje* mängd $A \in 2^S$. De mängder som ingår i Banach-Tarski-partitionen har så märklig struktur att vi inte kan definiera deras volym.

Vägen runt detta är att definiera en mängd $\mathcal{B} \subseteq 2^S$, kallad *Borel-$\sigma$-algebran*. Denna mängd innehåller de flesta mängder som man någonsin kommer stöta på, och det går att definiera en funktion $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ som uppfyller kraven ovan (och ett par krav till) som kallas *Lebesgue-måttet*.

# 4 Problem

1. (20p) Visa att kongruens är en transitiv relation, det vill säga om $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ där $A$ är kongruent med $B$ och $B$ är kongruent med $C$, så är $A$ kongruent med $C$.

   **Ledtråd:** Visa att sammansättningen av två isometriska funktioner är isometrisk.

2. (a) (10p) Rotation med vinkel $\theta$ kring origo i två dimensioner kan ses som en linjär avbildning med matrix

   $$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

   Visa att funktionen $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given av $r(x) = Rx$ är en isometri, genom att visa att

   $$|Rx - Ry| = |x - y|$$

   för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$.

   (b) (10p) Anta att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär isometri[1], alltså att $f(x) = Ax$ för någon matris $A$ med

   $$|Ax - Ay| = |x - y|$$

   för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Visa att $|\det(A)| = 1$.

   **Ledtråd:** Låt $e$ vara en egenvektor till $A$, och låt $x = e, y = 0$. Då är $|Ae| = |e|$. Men eftersom $Ae$ och $e$ är parallella måste då $Ae = \pm e$ gälla.

[1] Notera att inte alla isometrier är linjära: translation är ett enkelt motexempel.