

Ordinära differentialekvationer, dynamiska system och kaosteori

Tony Johansson
1MA239: Specialkurs i Matematik II
Uppsala Universitet

VT 2018

1 Introduktion

Dynamiska system kan generellt beskrivas som studien av ett (ofta fysikaliskt) system som förändras över tiden. Den grundläggande tanken är följande. Vi är intresserade av en kvantitet $x \in \mathbb{R}^n$ som en funktion av tiden $t \geq 0$, givet ett initialvärde $x(0)$. Ett dynamiskt system är en regel som låter oss avgöra $x(t)$ för alla $t > 0$, utan att tillföra någon information utöver initialvärdet $x(0)$. Vi kommer börja med att se ett par exempel på dynamiska system, innan vi ger oss in på en mer generell beskrivning av området.

Notation 1. *Vi kommer vara intresserade av kvantiteter x som antingen är definierade för alla reella ickenegativa tal $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, eller för alla ickenegativa heltal $t \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. I det kontinuerliga fallet är det vanligast att skriva $x(t)$, medan x_t oftast används i det diskreta fallet. Dock kan båda användas i båda situationer.*

1.1 Populationsdynamik

Ett antal matematiska modeller har utvecklats för att beskriva hur storleken på en *population* förändras över tiden. Här brukar population tolkas som det totala antalet individer av en viss typ (art) i ett slutet system. Det kan till exempel röra sig om antalet människor på jorden, eller antalet jästbakterier i en petriskål.

Antag att vi är intresserade av en särskilt enkel typ av bakterier, med följande egenskaper.

1. Vid tid $t = 0$ finns $x_0 \in \mathbb{N}$ individer, där x_0 är en parameter vi kan välja.
2. Varje individ lever exakt en tidsenhet, och vid sin död delas den och blir två (nyfödda) individer.

Om vi börjar med $x_0 = 1$ får vi $x_1 = 2, x_2 = 2x_1 = 4, \dots$, och det är enkelt att se att antalet levande individer x_t vid tid t är $x_t = 2^t$ för alla $t \in \{0, 1, \dots\}$. Börjar vi med ett annat x_0 får vi $x_t = x_0 2^t$. Detta system kan sammanfattas som

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t, & t = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Det finns uppenbara brister med den här modellen, till exempel att en population i ett slutet system aldrig kan växa obegränsat. Vi nöjer oss med detta i nuläget och går vidare.

1.2 Fritt fall

Anta att ett objekt vid tid $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ befinner sig på höjd $h = h(t)$ och faller (fritt, utan luftmotstånd) rakt mot jordens tyngdpunkt. Var kommer det befinna sig vid tid $t + \varepsilon, \varepsilon > 0$? Om vi ska kunna beskriva detta med ett dynamiskt system ska det gälla att vetskap om höjden $h(0)$ vid tid $t = 0$ är tillräckligt för att avgöra $h(t)$. Men utan vetskap om den initiala hastigheten $v(0)$ har vi ingen chans att avgöra $h(t)$.

Vi ställer i stället upp ett dynamiskt system där vi följer både höjd och hastighet. För att se detta som en kvantitet sätter vi $x(t) = (h(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$. Hastighet och höjd är relaterade enligt följande differentialekvationer:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -v(t), \\ \frac{dv}{dt} &= g, \end{aligned}$$

där g är gravitationskonstanten (vi antar här att accelerationen är konstant). Om vi skriver $x_1(t) = h(t)$ och $x_2(t) = v(t)$ kan vi beskriva det dynamiska systemet som

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t), \\ x_2'(t) = g, \\ (x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1)$$

1.3 Generellt ramverk

I ett dynamiskt system jobbar vi med en tidsdomän T , som i våra fall antingen kommer vara \mathbb{N}_0 eller $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Andra tidsdomäner är möjliga, men det krävs att de är slutna under addition: om $t_1, t_2 \in T$ ska också $t_1 + t_2$ ligga i T .

Ett dynamiskt system har följande centrala egenskaper. För alla $t, \tau \in T$ är $x(t + \tau)$ en deterministisk funktion av $x(t)$ och τ . Man definierar ofta en funktion $\Phi(\tau, x)$ via relationen $x(t + \tau) = \Phi(\tau, x(t))$ som ska gälla för alla $t, \tau \in T$. Funktionen $\Phi(\tau, x)$ kallas ett *flöde*, och beskriver hur kvantiteten x ändras från ett givet initialvärde.

Notera att Φ inte får ha något beroende av t . Detta innebär att om $t_1 \neq t_2$ och $x(t_1) = x(t_2)$ så måste $x(t_1 + \tau) = x(t_2 + \tau)$ gälla. Detta gör att inte alla differentialekvationer kan ses som dynamiska system. Om vi till exempel jämför differentialekvationerna

$$x'(t) = 1 - x(t), \quad y'(t) = y(t) - t$$

så har vi lösningar

$$x(t) = 1 + (x(0) - 1)e^{-t}, \quad y(t) = t + 1 + (y(0) - 1)e^t.$$

Vi kollar hur $x(t)$ ser ut med olika initialvärden. Låt $x_0(t)$ vara lösningen som ges av initialvärde $x_0(0) = 0$, alltså $x_0(t) = 1 - e^{-t}$. Vi definierar också $x_1(t)$ som lösningen med initialvärden $x_1(0) = 1 - e^{-1}$, det vill säga $x_1(t) = 1 - e^{-1}e^{-t} = 1 - e^{-t-1}$. Vi ser att $x_1(t) = x_0(t+1)$, vilket är vad vi önskar eftersom vi började med $x_1(0) = x_0(1)$.

Om vi försöker samma sak med $y(t)$ får vi ett annat resultat. Låt $y_0(0) = 0$, så $y_0(t) = t + 1 - e^t$. Om $y_1(0) = y_0(1) = 2 - e$ får vi $y_1(t) = t + 1 + (1 - e)e^t$. Vi har $y_0(t+1) \neq y_1(t)$ generellt.

Differentialekvationen $x'(t) = 1 - x(t)$ har tillhörande flöde

$$\Phi(\tau, x(t)) = 1 + (x(t) - 1)e^{-\tau}.$$

Det spelar ingen roll om vi börjar med initialvärde $x(0) = 0$ eller $x(1000) = 0$ — kurvan kommer se likadan ut och bara vara translaterad i tid.

1.4 Ordinära differentialekvationer

Vi kan nu specificera vilken klass av differentialekvationer vi är intresserade av. Först och främst ska differentialekvationerna vara *ordinära*, det vill säga de innehåller bara derivator i en variabel (nämligen tidsvariabeln). Som vi

demonstrerade ovan får derivatan dessutom bara vara beroende av $x(t)$, och alltså inte av t . Vi kan begränsa oss till differentialekvationer av formen

$$x^{(k)}(t) = H(x^{(k-1)}(t), x^{(k-2)}(t), \dots, x'(t), x(t))$$

där $x^{(k)}(t)$ betecknar den k :te derivatan i t , och högerledsfunktionen $H : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ är någon funktion. Till exempel kan differentialekvationen $x^{(3)}(t) = x''(t) - x'(t) + 1$ representeras av funktionen $H(a, b, c) = a - b + 1$.

Det räcker faktiskt att arbeta med första ordningens differentialekvationer (ekvationer där bara första derivatan dyker upp) om vi i stället jobbar med system av differentialekvationer. Vi ser att en fjärde ordningens differentialekvation

$$x^{(4)}(t) = H(x^{(3)}(t), x''(t), x'(t), x(t))$$

kan skrivas om via $x(t) = x_0(t), x'(t) = x_1(t), x''(t) = x_2(t), x^{(3)}(t) = x_3(t)$ som

$$\begin{cases} x'_0(t) = & x_1(t) \\ x'_1(t) = & x_2(t) \\ x'_2(t) = & x_3(t) \\ x'_3(t) = & H(x_3(t), x_2(t), x_1(t), x_0(t)) \end{cases}$$

på samma sätt som fritt fall-systemet (1) är ekvivalent med $h''(t) = -g$. Även om ekvationssystem ser krångligare ut än högre ordningens differentialekvationer så kommer denna transformation att underlätta vår generella beskrivning av dynamiska system.

Detta innebär att vi generellt kommer jobba med ordinära differentialekvationer av formen

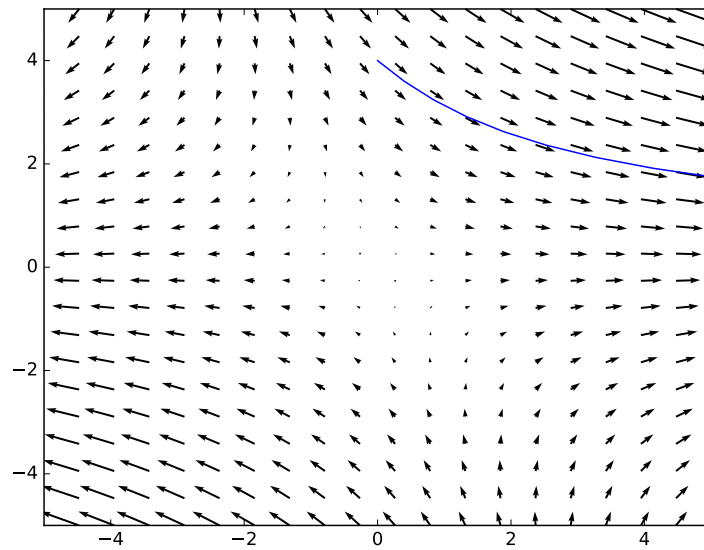
$$x'(t) = F(x(t))$$

där $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ för något n och $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. När vi tar derivatan av en vektor menar vi elementvis derivata, alltså $x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$.

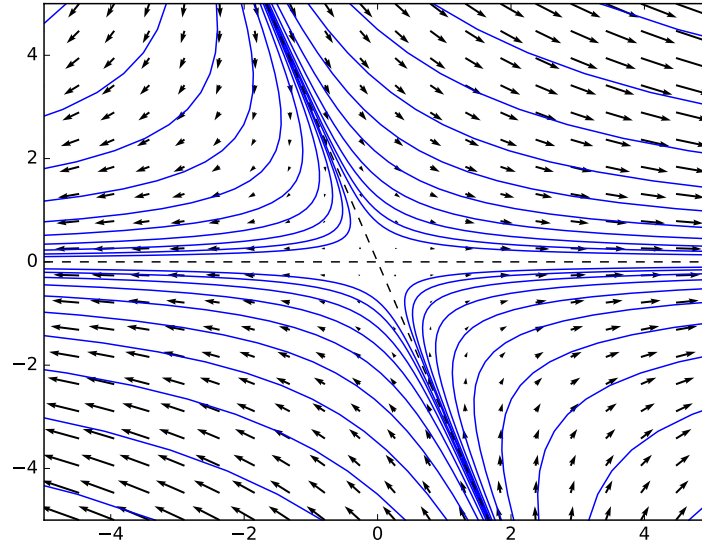
2 Mer om flöden

Det jag ska beskriva i denna delen är sant för dynamiska system i alla dimensioner, men hjälps mycket av en grafisk beskrivning. Vi håller oss därför till \mathbb{R}^2 . Vi kommer också anta att $T = \mathbb{R}_{\geq 0}$ och att vårt dynamiska system är en ordinär differentialekvation $(x_1(t), x_2(t))' = F(x_1(t), x_2(t))$. Låt oss ta exemplet

$$\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x'_2(t) = -x_2(t), \end{cases} \quad (2)$$



Figur 1: Flödesdiagram för dynamiska systemet (2), samt lösningen med initialvärde $(0, 4)$.



Figur 2: Ett stort antal lösningar för (2).

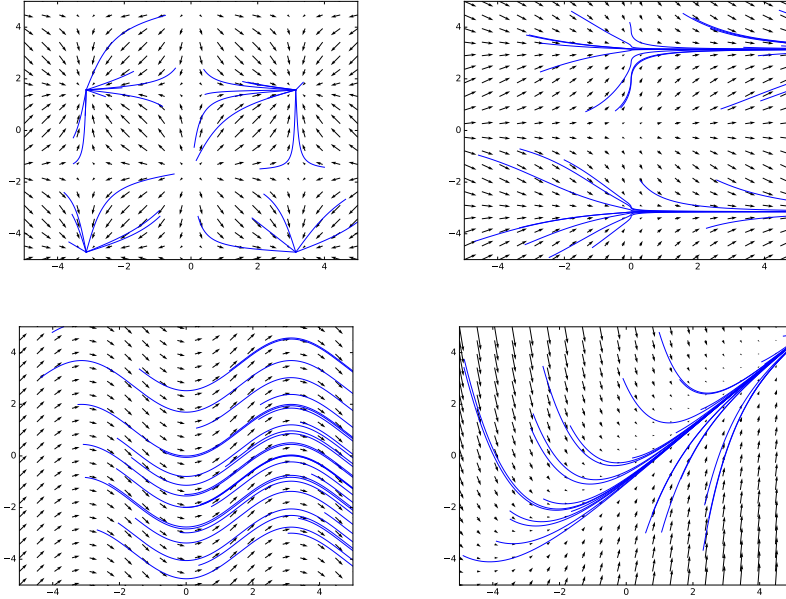
alltså $F(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, -x_2)$. Funktionen F är en funktion från \mathbb{R}^2 till \mathbb{R}^2 . En sådan funktion ritas enklast som ett flödesdiagram, se Figur 1. I figuren har vi även ritat lösningen för differentialekvationen med initialvärde $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 4)$. Från (2) kan vi avläsa att en sådan lösning måste börja med att röra sig i riktningen $F(0, 4) = (4, -4)$. Vektorerna i Figur 1 visar generellt hur en lösning kommer röra sig. Figur 2 visar ett stort antal lösningar med olika initialvärden.

I Figur 2 blir det tydligt (om det inte redan var det) att det finns ett antal olika *typer* av lösningar till (2), och att de räta linjerna $x_2 = 0$ och $x_2 = -3x_1$ (streckade) har någon betydelse.

Vi löser (2) för att förstå vad som händer. Vi kommer inte alltid kunna lösa våra system, men i detta fallet är det inte alltför svårt. Vi har

$$\begin{cases} x_1(t) &= \left(x_1(0) + \frac{x_2(0)}{3}\right) e^{2t} - \frac{x_2(0)}{3} e^{-t}, \\ x_2(t) &= x_2(0) e^{-t}. \end{cases} \quad (3)$$

Nu kan vi förstå varför linjerna $x_2 = 0$ och $x_2 = -3x_1$ är intressanta. Om vi börjar med $x_2(0) = 0$ ser vi att $x_2(t) = 0$ för alla $t \geq 0$ medan $x_1(t) = x_1(0)e^{2t}$. Detta innebär att lösningen kommer vara en rät linje på



Figur 3: Flödesdiagram för $F(x_1, x_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $F(x_1, x_2) = (\sqrt{|x_1|}, \sin x_2)$, $F(x_1, x_2) = (1, \sin x_1)$ och $F(x_1, x_2) = (e^{-x_1/10}, x_1 - x_2)$. När jag skriver θ menar jag vinkeln i $[0, 2\pi)$ som (x_1, x_2) bildar med x_1 -axeln. I varje fall ritas 30 lösningar med slumpmässigt valda initialvärden.

x_1 -axeln, och lösningarna rör sig bort från origo. Om vi istället börjar med $x_2(0) = -3x_1(0)$, kommer vi ha $x_1(t) = -\frac{x_2(0)}{3}e^{-t}$ och $x_2(t) = x_2(0)e^{-t}$. Då är $x_2(t) = -3x_1(t)$ för alla $t \geq 0$, och $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$.

Systemet (2) kan skrivas enkelt som $x'(t) = Ax(t)$ där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Denna har egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$ med motsvarande egenvektorer $v_1 = (1, 0)$ och $v_2 = (1, -3)$. Det finns tydligen ett samband här, eftersom egenvektorerna är parallella med linjerna $x_2 = 0$ och $x_2 = -3x_1$. Det 'r generellt så att studien av linjära differentialekvationssystem $x'(t) = Ax(t)$ till stor del består av en spektralanalys (det vill säga analys av egenvärden och egenvektorer) för matrisen A .

Figur 3 visar fler exempel på flödesdiagram, den här gången icke-linjära.

3 Numeriska metoder

När vi studerar differentialekvationer får vi ofta nöja oss med numeriska lösningar, eller med att skissa lösningar för hand. Här går vi igenom några av de grundläggande numeriska metoderna för att approximera en lösning, baserade på Taylors formel

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + O(h^2) = x(t) + hF(x(t)) + O(h^2). \quad (4)$$

3.1 Euler framåt

Taylors formel (4) föreslår den enklaste möjliga lösningsmetoden, nämligen Euler framåt. Givet ett initialvärde $x(0)$ definierar vi en talföljd (x_0, x_1, \dots) via $x_0 = x(0)$ och

$$x_{n+1} = x_n + hF(x_n).$$

Vi får en approximativ kurva genom att linjärt interpolera sekvensen, det vill säga rita räta linjer mellan x_n och x_{n+1} för alla n . Metoden är mer exakt ju mindre h är, och i tillämpningar görs en avvägning mellan noggrannhet och tiden det tar att generera den mängd punkter som behövs. Metoden är *explicit*, det vill säga vi kan beräkna x_{n+1} som en explicit funktion av x_n .

Fördelarna med Euler framåt är att den är lätt att begripa, beskriva och tillämpa. I många enklare tillämpningar duger den för att ge bra lösningar, men generellt sett är den kapabel att ge mycket stora fel. Utan att gå in på mer detaljer nöjer vi oss nu med att säga att den är *instabil* (vilket vi inte definierar) och ofta inte bra nog.

3.2 Euler bakåt

En variation på Euler framåt ges av att göra en Taylorutveckling kring punkten $t+h$ och inte t . Vi får

$$x(t) = x((t+h) - h) = x(t+h) - hx(t) + O(h^2).$$

Vi definierar en sekvens via $x_0 = x(0)$ och

$$x_{n+1} = x_n + hF(x_{n+1}).$$

Detta är en *implicit* metod: i varje steg måste vi lösa ekvationen $x_{n+1} = x_n + hF(x_{n+1})$, och om F är komplicerad är detta inte möjligt. Om till exempel $x_n = 1$ och $F(x) = e^{-x}$ så får vi x_{n+1} via ekvationen $x_{n+1} = 1 + he^{-x_{n+1}}$, vilket inte kan lösas algebraiskt. Detta gör att vi behöver numeriska metoder för att lösa ekvationer, men detta är inget större problem.

I och med ekvationslösningen är Euler bakåt lite krångligare att tillämpa än Euler framåt, men generellt är den mycket mindre känslig för fel än Euler framåt.

3.3 Runge-Kutta-metoder

I de flesta intressanta tillämpningar är Eulers stegmetoder helt enkelt inte bra nog, och MATLAB har ändå bra lösare i form av `ode45`, `ode23`, `ode113`, `ode15s` och `ode23s`. Dessa är baserade på Runge-Kutta-metoder, som är en approximering av Taylors formel med högre precision än Eulers stegmetoder. Runge-Kutta(4, 5)-metoden, som `ode45` använder, ges av

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

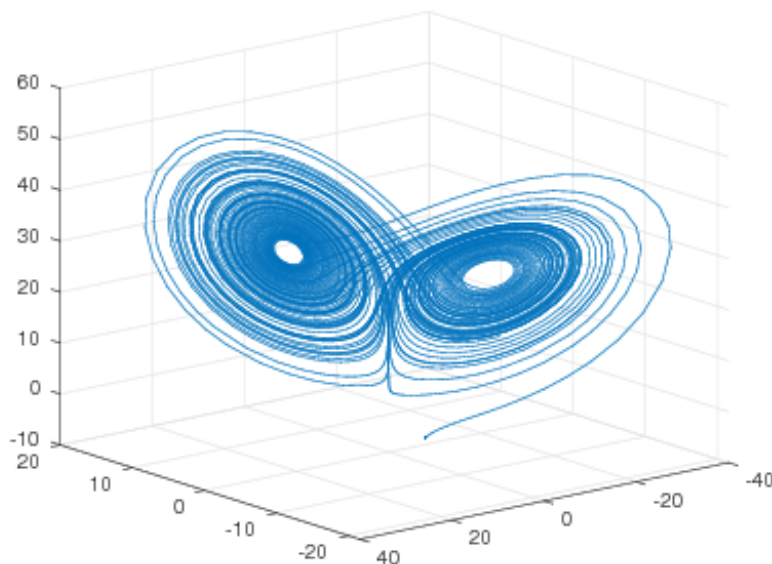
där

$$\begin{aligned}k_1 &= F(x_n), \\k_2 &= F\left(x_n + h\frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= F\left(x_n + h\frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= F(x_n + hk_3).\end{aligned}$$

Formeln är lite småkrånglig att beskriva och härleda, men det är inga större krångligheter som händer här. Vi beräknar riktningen k_1 vid punkt x_n , tar ett litet steg framåt och uppdaterar riktningen vid $x_n + h\frac{k_1}{2}$, och så vidare. Den slutliga riktningen är sedan ett viktat medel av de olika riktningarna vi tagit fram längs vägen. Metoden är explicit.

4 Kaosteori

Kaos kan sammanfattas som “när nuläget ger framtidsläget, men en approximation av nuläget inte ger en approximation av framtidsläget”. Vi demonstrerar via exempel.



Figur 4: Lorenzattraktorn, en lösningskurva till Lorenzsystemet (5).

4.1 Lorenzsystemet

Lorenzsystemet är ett differentialekvationssystem i tre dimensioner som ges av

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)), \\ x_2'(t) &= x_1(t)(\rho - x_3(t)) - x_2(t), \\ x_3'(t) &= x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Här är σ, ρ, β konstanter, vi väljer $\sigma = 10, \rho = 28$ och $\beta = 8/3$. Systemet togs fram av Lorenz för att beskriva "atmosfärisk konvektion". Bland matematiker är det främst känt som ett exempel på ett kaotiskt system. Se Figur 4 för en lösningskurva.

Så vad är det som är kaosartat med det här systemet? Förklaringen är att om vi har två startpunkter $x(0)$ och $y(0)$ med $|x(0) - y(0)| < \varepsilon$ för något litet $\varepsilon > 0$, så är vi vana vid att de motsvarande lösningskurvorna $x(t)$ och $y(t)$ följs åt ganska väl, eller åtminstone ser ungefär likadana ut. I Lorenzsystemet spelar det ingen roll hur litet ε är — förr eller senare kommer de två lösningarna $x(t), y(t)$ befinna sig i olika cirklar i figuren.

Detta ses enklast i animationsform, se <https://www.youtube.com/watch?v=FYE4JKAXSfY> (länken är klickbar här i pdf:en). Vid 0:57 i videon divergerar de tre lösningarna i videon, som till en början var mer eller mindre oskiljaktliga, till tre kvalitativt olika lösningar.

4.2 Logistiska ekvationen

Ett enkelt exempel på kaos ges av *logistiska ekvationen*,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (6)$$

Vi börjar med något $0 < x_0 < 1$, och $0 \leq r \leq 4$ är en konstant. Eftersom $x(1 - x) \leq 1/4$ kommer $0 < x_n < 1$ gälla för alla n .

Om sekvensen konvergerar till något $x = \lim x_n$ så måste vi ha $x = rx(1 - x)$. Med andra ord är $x = 0$ eller $1 - 1/r$. Vi försöker avgöra vad sekvensen konvergerar till, om den gör det.

$0 < r < 1$. I denna regionen är $1 - 1/r < 0$, så sekvensen kan bara konvergera till 0, om den konvergerar. Vi har

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \leq rx_n,$$

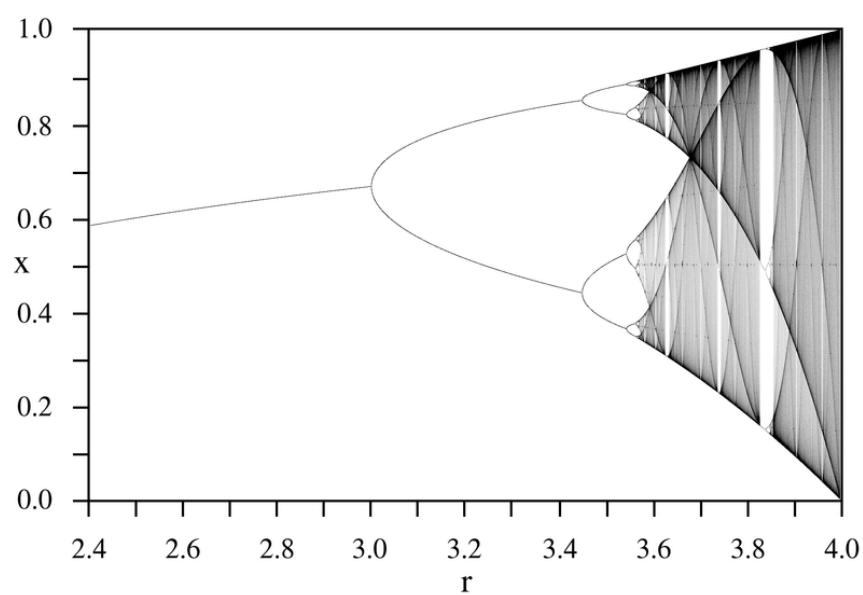
så $x_n \leq r^n x_0$, och x_n måste då konvergera till 0 exponentiellt.

$r > 1$. Vi kan först se att om $0 < x_n < 1 - 1/r$ så har vi

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) > rx_n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right) = x_n,$$

så x_n ökar när den är i regionen $(0, 1 - 1/r)$. På samma sätt kan vi visa att x_n avtar i regionen $(1 - 1/r, 1)$. Vi drar slutsatsen att *om x_n konvergerar så konvergerar sekvensen till $1 - 1/r$.*

Det visar sig att $\lim x_n = 1 - 1/r$ är sant när $1 < r < 3$, men för större r händer något intressant. Mellan $r = 3$ och $r = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ konvergerar sekvensen inte, utan hoppar istället fram och tillbaka mellan två olika värden oändligt många gånger. Mellan 3.449 och 3.544 börjar den hoppa mellan fyra olika värden. I kortare påföljande intervall hoppar den mellan 8 värden, mellan 16, och så vidare, fram till $r \approx 3.56995$. Det är här kaoset börjar. När $r > 3.56995$ kan man inte påstå att sekvensen konvergerar i någon mening, utan de allra flesta initialvärden ger oscillationer mellan oändligt många värden. Figur 5 visar ett diagram över utfallet för olika parametervärden r . Notera att kaoset upphör en kors stund kring $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$.



Figur 5: Ett så kallat *bifurkationsdiagram* för logistiska ekvationen (6), som visar gränsbeteendet som en funktion av olika parametervärden r . Mörkare delar av grafen är punkter där sekvensen spenderar en större del av sin tid för stora n .

5 Problem

OBS: Fler problem på nästa sida.

Varje problem är värt totalt 10 poäng.

1. Lösningarna till systemet

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 13x_1(t) - 30x_2(t) \\x_2'(t) &= 5x_1(t) - 12x_2(t)\end{aligned}$$

är av formen

$$\begin{aligned}x_1(t) &= Ae^{3t} + Be^{-2t}, \\x_2(t) &= Ce^{3t} + De^{-2t}.\end{aligned}$$

- (a) (4p) Uttryck konstanterna A, B, C, D i termer av initialvärdet $(x_1(0), x_2(0))$. (Exempelvis i (3) har vi motsvarande $A = x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0)$, och så vidare.)
 - (b) (3p) Om $(x_1(0), x_2(0)) = (3, 4)$, kommer lösningen gå mot $+\infty$ eller $-\infty$ i x_1 -riktningen?
 - (c) (3p) Vilka två linjer avskiljer flödesdiagrammet?
2. Om $F(x) = Ax$ där $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uppfyller $\det(A) = 0$, så är alla lösningar till systemet $x'(t) = Ax(t)$ räta linjer. Förklara varför.

Ledtråd: Notera att lösningarna oftast fortfarande innehåller exponentiella termer. Att lösningarna är räta linjer innebär att det finns k, m sådana att $x_2(t) = kx_1(t) + m$ för alla $t \geq 0$.

3. Vi vill använda Eulers stegmetoder för att lösa det endimensionella problemet

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}, \quad x(0) = 1,$$

med sann lösning

$$x(t) = \sqrt{2t + 1}.$$

- (a) (5p) Med steglängd $h = 1$, beräkna Euler framåt-approximationen x_3 av $x(3)$. Visa alla steg, det vill säga x_0, x_1, x_2, x_3 .
- (b) (5p) Med steglängd $h = 1$, beräkna Euler bakåt-approximationen x_3 av $x(3)$. Visa alla steg.

4. Definiera en sekvens via logistiska ekvationen, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Anta att det finns $a, b \in [0, 1]$ sådana att om $x_0 = a$ så är $x_i = b$ för alla udda i och $x_i = a$ för alla jämna i . Vi ska visa att $r > 3$ måste gälla, för att komma en liten bit närmare förklaringen till varför bifurkationsdiagrammet 5 ser ut som det gör när $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

- (a) (5p) Förklara varför a, b måste uppfylla fjärdegradsekvationen

$$x - r^2x(1 - x)(1 - rx(1 - x)) = 0. \quad (7)$$

- (b) (5p) Vi noterar att $x = 0$ och $x = 1 - 1/r$ är lösningar till (7). Efter polynomdivision har vi

$$\frac{x - r^2x(1 - x)(1 - rx(1 - x))}{x(x - (1 - \frac{1}{r}))} = r^3x^2 - (r^3 + r^2)x + (r^2 + r).$$

Visa att detta polynom har två reella rötter om och endast om $r > 3$.