Ramseyteori

Tony Johansson
1MA239: Specialkurs i Matematik II
Uppsala Universitet

VT 2018

Obs: Vissa delar av texten är färglagda för att underlätta förklaringarna.

1 Introduktion

Ramseyteori, döpt efter Frank P. Ramsey (1903–1930), kan sammanfattas som “studien av ordning som måste uppstå i strukturer som är tillräckligt stora”. Området är känt för enkla frågeställningar, där de mest kända problemen fortfarande står utan tillfredsställande lösningar. Ramseyteori har bland annat lett fram till Green-Taos sats, ett av de mest hyllade resultaten under detta århundrade.

Sats 1 (Green-Tao, 2004)**.** *Låt $k \geq 2$ vara ett ändligt heltal. Det existerar en aritmetisk talföljd av längd k där alla tal är primtal.*

Detta är långt ifrån vad vi kan bevisa, men vi hoppar tillbaka ungefär 80 år till Van der Waerdens sats om aritmetiska talföljder. Efter det kommer vi prata om satsen som gav namn åt fältet, nämligen Ramseys sats.

2 Van der Waerdens sats

För heltal $k \geq 2$ definierar vi en artitmetisk talföljd av längd k (förkortat “k-AT”) som en följd av k tal $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sådan att det finns ett tal r med $a_i - a_{i-1} = r$ för $i = 1, 2, \ldots, k$. Tre exempel på aritmetiska talföljder:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$
$$7, 8, 9$$
$$19, 11, 3, -5.$$

Observera att vi enbart kommer arbeta med följder av ändlig längd. Många av koncepten i denna föreläsningen har oändliga motsvarigheter, men vi håller oss till ändliga tal för enkelhetens skull.

Många resultat inom Ramseyteori kan formuleras som "färgläggningsproblem", där vi färgar alla element i en mängd i olika färger. Några exempel på färgläggningar av $\{1, 2, \ldots, 9\}$ finns i Tabell 1. Vi kommer nästan uteslutande hålla oss till att färga mängder i två färger, säg röd och blå.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(a)	B	R	R	B	R	B	B	R	B
(b)	B	B	R	R	R	B	R	B	R
(c)	R	R	B	R	R	B	B	R	R
(d)	B	R	R	B	B	R	R	B	R
(e)	B	R	B	B	R	B	R	R	B

Tabell 1: Exempel på färgläggningar av $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

Sats 2 (Van der Waerden, 1927)**.** *Låt $k \geq 2$ vara ett heltal. Det existerar ett ändligt tal $W(k)$ sådant att om $n \geq W(k)$ och $\{1, 2, \ldots, n\}$ färgas i två färger, så existerar en enfärgad k-AT $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, alltså antingen en k-AT där alla tal eller röda, eller en där alla tal är blå. Om $n < W(k)$ så existerar en färgläggning av $\{1, 2, \ldots, n\}$ som inte enfärgar någon k-AT.*

Det är känt att $W(3) = 9$. Van der Waerdens sats säger alltså att alla 2^9 färgläggningar av $\{1, 2, \ldots, 9\}$ innehåller (minst) en enfärgad 3-AT, och att det finns en färgläggning av $\{1, 2, \ldots, 8\}$ som inte innehåller någon enfärgad 3-AT. I Tabell 1 ser vi till exempel att (a) ger en enfärgad 3-AT i $2, 5, 8$. Alla fem följder innehåller en enfärgad 3-AT, vilket van der Waerdens sats garanterar.

Van der Waerdens sats gäller också för ett större antal färger, och vi kan låta $W(r, k)$ vara storleken på n som garanterar att en färgläggning av $\{1, 2, \ldots, n\}$ i r färger ger en enfärgad k-AT. Det är känt att $W(2, 4) = 35, W(2, 5) = 178, W(2, 6) = 1132, W(3, 3) = 27, W(3, 4) = 293, W(4, 3) = 76$. För resterande par (r, k) känner vi bara till begränsningar som lär vara långt från det sanna svaret[1]. Till exempel vet vi att för alla $k, r \geq 2$ så är

$$\frac{kr^k}{e(k+1)^2} < W(r, k) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}},$$

[1]Wikipedia listar mycket av vad vi vet om Van der Waerden-tal: `https://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waerden_number`

med reservation för att det kan finnas bättre begränsningar som jag inte känner till. Detta är ett ofattbart stort spann. Till exempel säger detta alltså att *antalet siffror* i $W(3,10)$ ligger mellan 4 och ett tal som är för stort för min dator att beräkna (och samma gäller för antalet siffror i antalet siffror). Detta är typiskt för Ramseyteori.

Nu går vi tillbaka till färgläggningar i två färger och $W(3)$, och en begränsning vi faktiskt kan bevisa. Det är som sagt känt att $W(3) = 9$, och det är inte för mycket jobb för en dator att testa de $2^9 = 512$ möjliga färgläggningarna för att bevisa detta, men vi presenterar istället följande berömda bevis från Graham och Rothschild (1974).

Lemma 1.

$$W(3) \leq 325.$$

Bevis. Fixera en godtycklig färgläggning av $\{1, 2, \ldots, 325\}$. Vi bevisar att denna ger en enfärgad 3-AT.

Dela in $\{1, 2, \ldots, 325\}$ i 65 block $B_0, B_1, \ldots, B_{64}$, där $B_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B_1 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, och generellt

$$B_i = \{5i + 1,\ 5i + 2,\ 5i + 3,\ 5i + 4,\ 5i + 5\}$$

för $i = 0, 1, \ldots, 64$.

För varje i färgas de fem talen i B_i i en av $2^5 = 32$ följder: BBBBB, BBBBR, BBBRB, ..., eller RRRRR. Brevlådeprincipen säger då att bland de första 33 blocken $B_0, \ldots, B_{32}$, så måste två existera med identiska färgföljder. Låt $0 \leq a < b \leq 32$ vara två olika tal sådana att B_a, B_b ges samma färgföljd. Till exempel kan båda ha följd RBRRB, så att färgläggningen är[2]

$$\begin{array}{ccccc} 5a+1, & 5a+2, & 5a+3, & 5a+4, & 5a+5, \\ 5b+1, & 5b+2, & 5b+3, & 5b+4, & 5b+5. \end{array} \tag{1}$$

Om B_a innehåller en enfärgad 3-AT så är vi klara, så anta att B_a inte innehåller en enfärgad 3-AT. Två av talen $5a + 1, 5a + 2, 5a + 3$ måste ha samma färg (brevlådeprincipen), säg $5a+c_1$ och $5a+c_2$ där $1 \leq c_1 < c_2 \leq 3$. I exemplet (1) är $c_1 = 1, c_2 = 3$. Vi kan anta att båda är röda (om de är blå kan vi göra resten av beviset med röd/blå utbytt överallt). De två talen $5a + c_1, 5a + c_2$ bildar en 3-AT med $5a + c_3$ där $c_3 = 2c_2 - c_1 \leq 5$. Eftersom vi antagit att B_a inte innehåller någon enfärgad 3-AT så måste $5a + c_3$, och $5b + c_3$, vara blå. Vi har alltså

$$\begin{array}{ccc} 5a+c_1, & 5a+c_2, & 5a+c_3, \\ 5b+c_1, & 5b+c_3, & 5b+c_3. \end{array}$$

[2] Följderna är färglagda, vilket du kan missa om du har skrivit ut det här i svartvitt.

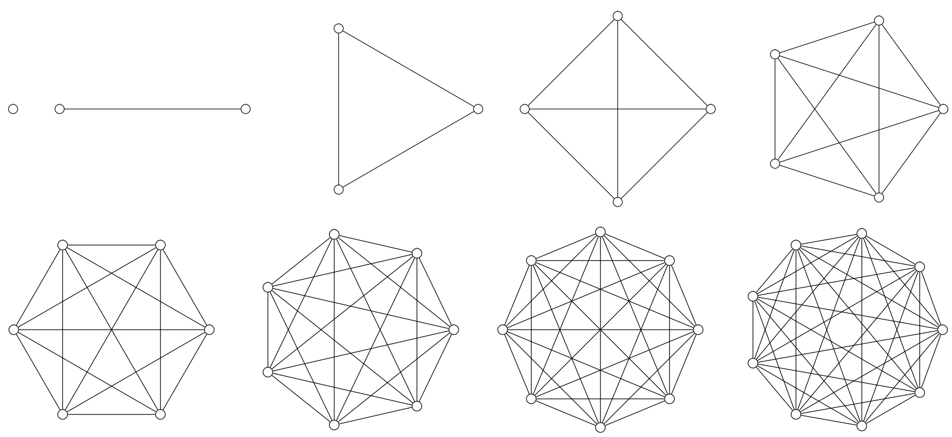
Låt $c = 2b - a$. Talet $5c + c_3 \leq 325$ (bevisa denna olikhet, Problem 2) är involverat i två 3-AT:er, nämligen

$$(5a + c_1,\ 5b + c_2,\ 5c + c_3), \tag{2}$$
$$(5a + c_3,\ 5b + c_2,\ 5c + c_3). \tag{3}$$

Så oavsett om $5c + c_3$ färgas röd eller blå, så är den involverad i en enfärgad 3-AT. Eftersom färgläggningen valdes godtyckligt bevisar detta att $W(3) \leq 325$. □

3 Ramseys sats

Ramseys sats kan också formuleras i termer av färgläggningar, den här gången av grafer. En graf beskriver ett nätverk, och består av en mängd noder och kanter som förbinder noderna. Figur 1 visar de så kallade *kompletta graferna*, som är de enda vi kommer bry oss om.



Figur 1: De kompletta graferna $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_9$.

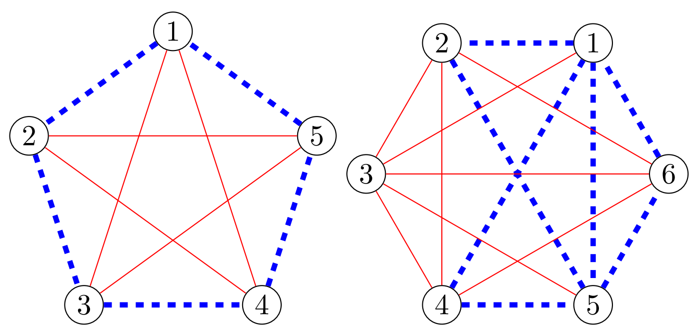
Definition 1. *En (oriktad)* graf *består av en nodmängd V och en kantmängd E av par $\{u, v\}$ där $u, v \in V$.*

Den kompletta grafen på n noder*, betecknad K_n, är grafen med $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ där E består av alla par $\{u, v\}$ med $u \neq v$.*

Ramseys sats berör färgläggningar av kantmängden i K_n. Låt oss kalla denna E_n.

Sats 3 (Ramsey, 1930)**.** *Låt $s, t \geq 2$ vara heltal. Det existerar ett tal $R(s, t)$ sådant att om $n \geq R(s, t)$ kanterna i K_n färgas i två färger, så existerar en blå K_s eller en röd K_t. Om $n < R(s, t)$ så existerar en färgläggning av E_n som varken innehåller en blå K_s eller en röd K_t.*

Ramseys sats har generaliserats till godtyckligt många färger, men vi kommer igen bara bry oss om färgläggningar i två färger, som i Figur 2. Det enklaste icketriviala exemplet är $R(3, 3) = 6$, då Ramseys sats frågar om enfärgade trianglar (K_3 är en triangel). Figur 2 bevisar att $R(3, 3) > 5$, men precis som med $W(3)$ är det betydligt svårare att visa att $R(3, 3) \leq 6$.



Figur 2: En triangelfri färgläggning av K_5, och en färgläggning av K_6 som innehåller tre blå trianglar (145, 156, 125), fyra röda trianglar (234, 236, 246, 346) och en röd K_4 (2346).

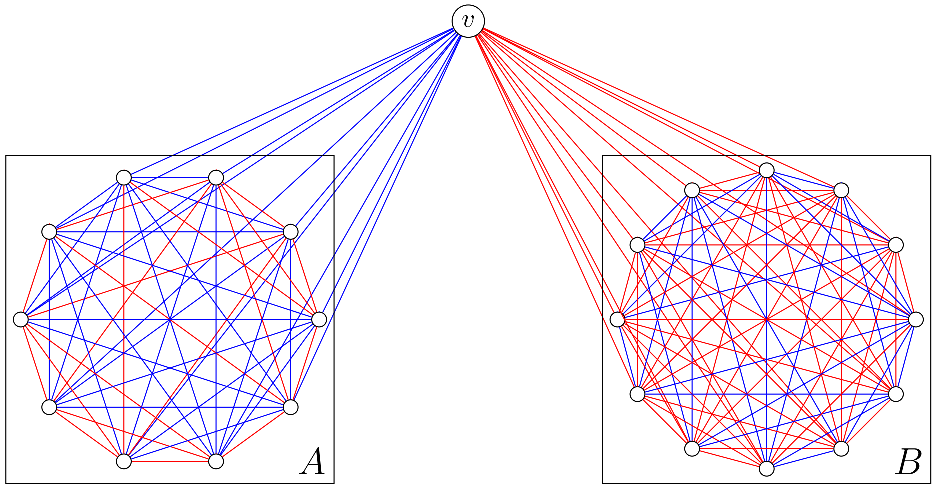
Vi bevisar Ramseys sats genom att begränsa $R(s, t)$ uppifrån. Först visar vi ett lemma. Definiera $R(1, t) = R(s, 1) = 1$ för alla $r, s \geq 1$.

Lemma 2. *Låt $s, t \geq 2$. Då är*

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1).$$

Bevis. Låt $N = R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$ och fixera en färgläggning av E_N. Vi vill visa att K_N innehåller minst en blå K_s eller en röd K_t. Låt v vara en nod i grafen. Låt A vara de noder som har en röd kant till v, och B de noder som har en blå kant till v. Säg att A innehåller k noder, och B innehåller ℓ noder. Eftersom $k + \ell = N - 1 = R(s - 1, t) + R(s, t - 1) - 1$, så måste vi antingen ha $k \geq R(s - 1, t)$ eller $\ell \geq R(s, t - 1)$.

Om $k \geq R(s - 1, t)$ så innehåller A antingen en röd K_t eller en blå K_{s-1}. Detta följer direkt från definitionen av $R(s - 1, t)$. Denna blå K_{s-1}, om den existerar, formar en blå K_s tillsammans med v. Å andra sidan, om



Figur 3: Delningen av K_N i beviset av Lemma 2. **OBS:** Grafen innehåller kanter mellan A och B, men de visas inte i figuren.

$\ell \geq R(s, t-1)$ så innehåller B antingen en blå K_s, eller en röd K_{t-1} som bildar en röd K_t tillsammans med v. Detta visar att K_N måste innehålla en blå K_s eller en röd K_t. □

Lemma 2 leder direkt till följande, via induktion. Beviset är Problem 4.

Lemma 3.

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \frac{(s+t-2)!}{(s-1)!(t-1)!}.$$

För att få en koncis övre gräns för $R(k,k)$ använder vi Stirlings formel: när n är stort är

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n) \tag{4}$$

där $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Detta medför att när $k \to \infty$ så är (Problem 5)

$$R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \sim \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi(k-1)}}.$$

Detta enkla bevis från Paul Erdős och George Szekeres från 1935 (som kallas Erdős-Szekeres sats) är väsentligen det bästa vi känner till. År 2009 visade David Conlon att det finns en konstant C sådan att

$$R(k+1,k+1) \leq k^{-C\frac{\log k}{\log\log k}} \binom{2k}{k}.$$

Här använder vi $R(k+1,k+1)$ för att uttrycket blir lättare att skriva. Eftersom k är stort har det ingen större betydelse. Faktorn framför $\binom{2k}{k}$ går mot 0 då $k \to \infty$, men är fortfarande obetydlig jämfört med den ledande faktorn 4^k.

3.1 Överkurs: En undre begränsning av $R(k,k)$

Med hjälp av grundläggande sannolikhetsteori kan vi visa att

$$R(k,k) \geq \sqrt{2}^{k-1}. \tag{5}$$

Detta används ofta som ett tidigt exempel på hur sannolikhetsteori kan användas för att bevisa teoretiska resultat som till synes inte har något med sannolikhetsteori att göra, något som kallas “The probabilistic method”.

Ekvation (5) kan också sägas i ord som att K_n kan färgas i två färger utan en enfärgad $K_{2\log_2 n}$. Beviset är ickekonstruktivt, dvs det berättar inte hur man skulle gå till väga för att färglägga kanterna i K_n för att uppnå detta. Vi visar faktiskt något ännu starkare: *nästan alla färgningar av K_n är sådana att ingen enfärgad $K_{2\log_2 n}$ existerar.* Trots detta har ingen lyckats explicit konstruera en färgning som ens kommer i närheten av detta. Detta paradoxala fenomen dyker upp gång på gång när det kommer till objekt som väljs slumpmässigt; vi kan visa att nästan alla objekt av en viss typ har en viss egenskap, medan en explicit beskrivning av ett sådant objekt är mycket svår att konstruera.

Obs: Beviset som följer lärs oftast ut på doktorandnivå, så bör klassas som grov överkurs i denna kursen, även om det tekniskt sett inte innehåller någon komplicerad matematik. Jag tog med det för att det är ett av mina favoritbevis, men det är fritt fram att hoppa över.

Vi kan välja vår färgläggning av K_n slumpmässigt. För varje kant i E_n singlar vi en slant: med sannolikhet 1/2 färgas kanten blå, och med sannolikhet 1/2 färgas kanten röd. Vi är intresserade av sannolikheten att färgläggningen varken ger en röd K_k eller en blå K_k.

Låt S vara en mängd av k noder. Det finns $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$ kanter inom S. Sannolikheten att vår slumpmässiga färgläggning färgar alla dessa röda är

$$\Pr\{S \text{ är helröd}\} = 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Detta är för att varje kant färgas röd med sannolikhet 1/2 oberoende av varandra: sannolikheten att två kanter båda färgas röda är $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, och så vidare. Vi har

$$\Pr\{S \text{ är enfärgad}\} = \Pr\{S \text{ är helröd}\} + \Pr\{S \text{ är helblå}\} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Nu måste vi börja använda lite mer avancerad notation, men konceptuellt tror jag inte det är omöjligt att förstå.

För en mängd S av noder definierar vi $\mathbf{1}_S$ (en "indikatorvariabel") som

$$\mathbf{1}_S = \begin{cases} 1 & \text{om } S \text{ är enfärgad,} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta är en slumpvariabel. Väntevärdet för $\mathbf{1}_S$ är

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_S\right] = 1 \times \Pr\left\{S \text{ är enfärgad}\right\} + 0 \times \Pr\left\{S \text{ ej enfärgad}\right\} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Låt X beteckna antalet enfärgade mängder av storlek k. Vi kan skriva

$$X = \sum_{S:|S|=k} \mathbf{1}_S.$$

Eftersom väntevärde är en linjär operation har vi

$$\mathbf{E}\left[X\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{S:|S|=k} \mathbf{1}_S\right] = \sum_{S:|S|=k} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_S\right] = \sum_{S:|S|=k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Vi summerar över alla nodmängder av storlek k. Antalet sådana är $\binom{n}{k}$, så,

$$\mathbf{E}\left[X\right] = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Vi använder olikheten

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \sim \left(\frac{ne}{k}\right)^k,$$

som också är en följd av Stirlings formel. Då är

$$\mathbf{E}\left[X\right] = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k 2^{1-\binom{k}{2}} = 2\left[\frac{ne}{k} 2^{-\frac{(k-1)}{2}}\right]^k.$$

Om vi låter $k = \lceil 1 + 2\log_2 n \rceil$ så är

$$\frac{ne}{k} 2^{-\frac{(k-1)}{2}} \leq \frac{e}{\lceil 1 + 2\log_2 n \rceil} < \frac{1}{2}$$

om n är tillräckligt stort. Det följer att

$$\mathbf{E}\left[X\right] < 2\left(\frac{1}{2}\right)^k < 1.$$

Men X är en slumpvariabel som tar värden i $\{0, 1, 2, \dots\}$. Om dess väntevärde är mindre än 1 måste det finnas minst en färgläggning som ger $X = 0$. Detta visar att om n är tillräckligt stort så existerar en färgläggning av K_n som inte innehåller någon enfärgad $K_{\lceil 1+2\log_2 n\rceil}$. Med andra ord är

$$R(\lceil 1 + 2\log_2 n\rceil, \lceil 1 + 2\log_2 n\rceil) > n$$

om n är tillräckligt stort. Om vi låter $k = \lceil 1 + 2\log_2 n\rceil$ så har vi $n > 2^{\frac{k-1}{2}}$, och detta kan skrivas som

$$R(k, k) > 2^{(k-1)/2}$$

4 Problem

Poäng för närvaro på de två föreläsningarna: 10p vardera. Totalt 40p är fördelat över 5 uppgifter, 8p vardera.

1. En av talföljderna i Tabell 1 bevisar att $W(3) > 8$. Vilken?
   (**Ledtråd:** Använd uteslutningsmetoden. Svaret är inte (a), eftersom 2, 5, 8 är en röd 3-AT med alla tal i $\{1, 2, \dots, 8\}$.)

2. (a) (3p) Visa olikheten $5c + c_3 \leq 325$ i beviset av Lemma 1.

   (b) (5p) Visa att de två talföljderna $(5a + c_1, 5b + c_2, 5c + c_3)$ och $(5a + c_3, 5b + c_3, 5c + c_3)$ (ekvation (2) och (3)) är aritmetiska talföljder.

3. (a) (2p) Bland de $2^5 = 32$ möjliga färgläggningarna av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ge exempel på sex stycken som innehåller en enfärgad 3-AT.

   (b) (2p) Visa att bland de $2^5 = 32$ möjliga färgläggningarna av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, finns exakt 14 som *inte* innehåller en enfärgad 3-AT.
   (**Ledtråd:** Lista de 7 följder som börjar med B. De resterande 7 följer från symmetri.)

   (c) (4p) Utan att nödvändigtvis ha löst (b), förklara hur (b) kan användas för att visa att

   $$W(3) \leq 5(2 \cdot 14 + 1) = 145.$$

4. Visa att för heltal $a > b \geq 2$ är

   $$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \binom{a}{b}.$$

   (Denna identitet håller mer generellt.)
   (**Ledtråd:** $\binom{a}{b}$ anger antalet sätt att välja b element ur en mängd av storlek a.)

5. Använd Stirlings formel (4) för att visa att

   $$\binom{2k}{k} \sim \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}},$$

   alltså att

   $$\lim_{k \to \infty} \binom{2k}{k} \frac{\sqrt{\pi k}}{4^k} = 1.$$