Banach-Tarskis paradox — Problem och lösningar

Tony Johansson
1MA239: Specialkurs i Matematik II
Uppsala Universitet

VT 2018

Problem 1

Visa att kongruens är en transitiv relation, det vill säga om $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ där A är kongruent med B och B är kongruent med C, så är A kongruent med C.

Ledtråd: Visa att sammansättningen av två isometriska funktioner är isometrisk.

Lösning

Låt $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara isometriska funktioner, alltså sådana att

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \quad |g(x) - g(y)| = |x - y|$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Eftersom $g(x), g(y) \in \mathbb{R}^n$ är då

$$|f(g(x)) - f(g(y))| = |g(x) - g(y)| = |x - y|$$

så $f \circ g$ (sammansättningen av f och g) är isometrisk. Om $g(A) = B$ och $f(B) = C$ har vi att $f(g(A)) = C$, så A, C är kongruenta.

Problem 2

(a) Rotation med vinkel θ kring origo i två dimensioner kan ses som en linjär avbildning med matrix

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Visa att funktionen $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given av $r(x) = Rx$ är en isometri, genom att visa att

$$|Rx - Ry| = |x - y|$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(b) Anta att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär isometri[1], alltså att $f(x) = Ax$ för någon matris A med

$$|Ax - Ay| = |x - y|$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Visa att $|\det(A)| = 1$.

Ledtråd: Låt e vara en egenvektor till A, och låt $x = e, y = 0$. Då är $|Ae| = |e|$. Men eftersom Ae och e är parallella måste då $Ae = \pm e$ gälla.

Lösning

(a) Det går lika bra att visa att $|Rz| = |z|$ för alla $z \in \mathbb{R}^2$, för $|Rx - Ry| = |R(x - y)| = |x - y|$ följer uppenbarligen. Om $z = (z_1, z_2)$ har vi

$$|Rz|^2 = \left| \begin{pmatrix} z_1 \cos\theta - z_2 \sin\theta \\ z_1 \sin\theta + z_2 \cos\theta \end{pmatrix} \right|^2$$
$$= (z_1 \cos\theta - z_2 \sin\theta)^2 + (z_1 \sin\theta + z_2 \cos\theta)^2$$
$$= z_1^2 \cos^2\theta - 2z_1 z_2 \cos\theta \sin\theta + z_2^2 \sin^2\theta + z_1^2 \cos^2\theta + 2z_1 z_2 \sin\theta \cos\theta + z_2^2 \cos^2\theta$$
$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(z_1^2 + z_2^2) = |z|^2.$$

Så $|Rz| = |z|$ för alla $z \in \mathbb{R}^2$.

(b) Eftersom $|Az| = |z|$ för alla $z \in \mathbb{R}^n$ har vi $Az = 0$ om och endast om $z = 0$. Det följer att alla egenvärden är nollskilda, och egenvektorerna $e_1, \ldots, e_n$ bildar en bas i $\mathbb{R}^n$. Vi har $|Ae_i| = |e_i|$ för alla i, så vi måste ha $Ae_i = \pm e_i$. Alltså är alla egenvärden $l_i = \pm 1$, och

$$\det(A) = l_1 l_2 \ldots l_n = \pm 1.$$

[1] Notera att inte alla isometrier är linjära: translation är ett enkelt motexempel.