# Ordinära differentialekvationer, dynamiska system och kaosteori
# Problem och lösningar

Tony Johansson
1MA239: Specialkurs i Matematik II
Uppsala Universitet

VT 2018

## Problem 1

Lösningarna till systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 13x_1(t) - 30x_2(t) \\ x_2'(t) &= 5x_1(t) - 12x_2(t) \end{aligned}$$

är av formen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ae^{3t} + Be^{-2t}, \\ x_2(t) &= Ce^{3t} + De^{-2t}. \end{aligned}$$

(a) Uttryck konstanterna $A, B, C, D$ i termer av initialvärdet $(x_1(0), x_2(0))$. (Exempelvis i (3) har vi motsvarande $A = x_1(0)+\frac{1}{3}x_2(0)$, och så vidare.)

(b) Om $(x_1(0), x_2(0)) = (3, 4)$, kommer lösningen gå mot $+\infty$ eller $-\infty$ i $x_1$-riktningen?

(c) Vilka två linjer avskiljer flödesdiagrammet?

### Lösning

(a) Vi skulle kunna lösa systemet, eller använda oss av egenvärdesanalys, men låt oss gå en mer basal väg. Om vi stoppar in $t = 0$ får vi

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A + B, \\ x_2(0) &= C + D. \end{aligned}$$

Om vi deriverar $x_1(t)$ och $x_2(t)$ och stoppar in $t = 0$ får vi dessutom

$$3A - 2B = x_1'(0) = 13x_1(0) - 30x_2(0),$$
$$3C - 2D = x_2'(0) = 5x_1(0) - 12x_2(0).$$

Vi får att

$$\begin{aligned} 5A &= (3A - 2B) + 2(A + B) = 15x_1(0) - 30x_2(0), \\ -5B &= (3A - 2B) - 3(A + B) = 10x_1(0) - 30x_2(0), \\ 5C &= (3C - 2D) + 2(C + D) = 5x_1(0) - 10x_2(0), \\ -5D &= (3C - 2D) - 3(C + D) = 5x_1(0) - 15x_2(0). \end{aligned}$$

Vi får att

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (3x_1(0) - 6x_2(0))e^{3t} + (-2x_1(0) + 6x_2(0))e^{-2t}, \\ x_2(t) &= (x_1(0) - 2x_2(0))e^{3t} + (-x_1(0) + 3x_2(0))e^{-2t}. \end{aligned}$$

(b) Med $(x_1(0), x_2(0)) = (3, 4)$ har vi

$$x_1(t) = -15e^{3t} + 18e^{-2t},$$

och när $t \to +\infty$ har vi $x_1(t) \to +\infty$.

(c) Vi ser från våra $A, B, C, D$ att dessa byter tecken vid $x_1(0) = 2x_2(0)$ och $x_1(0) = 3x_2(0)$, så de avskiljande linjerna är $x_2 = x_1/2$ och $x_2 = x_1/3$.

# Problem 2

Om $F(x) = Ax$ där $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ uppfyller $\det(A) = 0$, så är alla lösningar till systemet $x'(t) = Ax(t)$ räta linjer. Förklara varför.

**Ledtråd:** Notera att lösningarna oftast fortfarande innehåller exponentiella termer. Att lösningarna är räta linjer innebär att det finns $k, m$ sådana att $x_2(t) = kx_1(t) + m$ för alla $t \geq 0$.

## Lösning

Om $\det(A) = 0$ är systemet $x'(t) = Ax(t)$ av formen

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2'(t) &= \gamma\alpha x_1(t) + \gamma\beta x_2(t) \end{aligned}$$

för någon konstant $\gamma$, eftersom de två radvektorerna i $A$ måste vara parallella. Vi har $x_1'(t) - \gamma x_2'(t) = 0$, så funktionen $y(t) = x_1(t) - \gamma x_2(t)$ har $y'(t) = 0$ och är därmed konstant. Alltså är $y(t)$ konstant, säg $y(t) = m$, och $x_1(t) = \gamma x_2(t) + m$.

## Problem 3

Vi vill använda Eulers stegmetoder för att lösa det endimensionella problemet

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}, \quad x(0) = 1,$$

med sann lösning

$$x(t) = \sqrt{2t+1}.$$

(a) Med steglängd $h = 1$, beräkna Euler framåt-approximationen $x_3$ av $x(3)$. Visa alla steg, det vill säga $x_0, x_1, x_2, x_3$.

(b) Med steglängd $h = 1$, beräkna Euler bakåt-approximationen $x_3$ av $x(3)$. Visa alla steg.

### Lösning

(a) Vi har $x_0 = 1/x(0) = 1$, och

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + F(x_0) = 2 \\ x_2 &= x_1 + F(x_1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ x_3 &= x_2 + F(x_2) = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{29}{10} \end{aligned}$$

(b) Jag inser att jag aldrig förklarat hur Euler bakåt fungerar när det finns flera lösningar till ekvationen, så ni kommer inte bedömas på denna uppgiften.

Vi kommer behöva lösa ekvationen $x_{k+1} = x_k + F(x_{k+1})$, alltså

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Vi har

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{x_k^2}{4}}.$$

Om $x_k > 0$ och vi väljer minustecknet kommer $x_{k+1}$ vara negativ. Om vi skissar ett lösningsdiagram, allternativt noterar att derivatan är positiv vid $x_k$, konstaterar vi att det rimligare alternativet är plustecknet, så vi säger att

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \sqrt{1 + \frac{x_k^2}{4}}.$$

Med $x_0 = 1$ ger detta

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{7+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Jag gjorde uppenbarligen något misstag när jag konstruerade uppgiften, och jag vill inte ens ge mig på att försöka ge ett uttryck för $x_3$.

## Problem 4

Definiera en sekvens via logisitiska ekvationen, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Anta att det finns $a, b \in [0, 1]$ sådana att om $x_0 = a$ så är $x_i = b$ för alla udda $i$ och $x_i = a$ för alla jämna $i$. Vi ska visa att $r > 3$ måste gälla, för att komma en liten bit närmare förklaringen till varför bifurkationsdiagrammet (5) ser ut som det gör när $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

(a) Förklara varför $a, b$ måste uppfylla fjärdegradsekvationen

$$x - r^2x(1-x)(1-rx(1-x)) = 0.$$

(b) Vi noterar att $x = 0$ och $x = 1 - 1/r$ är lösningar till (7). Efter polynomdivision har vi

$$\frac{x - r^2x(1-x)(1-rx(1-x))}{x\left(x - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right)} = r^3x^2 - (r^3 + r^2)x + (r^2 + r).$$

Visa att detta polynom har två reella rötter om och endast om $r > 3$.

### Lösning

(a) Om sekvensen $(x_i)$ alternerar mellan $a$ och $b$ är

$$a = rb(1-b), \quad \text{och} \quad b = ra(1-a),$$

så genom att stoppa in den senare ekvationen i den första har vi

$$a = r^2a(1-a)(1-ra(1-a)),$$

och samma ekvation måste gälla för $b$.

(b) Låt $f(x) = x^2 - (1 + r^{-1})x + (r^{-1} + r^{-2})$. Vi visar att $f(x)$ (som är det nämnda polynomet dividerat med $r^3$) har två reella rötter om och endast om $r > 3$. Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (1 + r^{-1})x + (r^{-1} + r^{-2}) \\ &= \left(x - \frac{1 + r^{-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 + r^{-1}}{2}\right)^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Rötterna till $f(x)$ ges av

$$x = \frac{1 + r^{-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \left(\frac{1 + r^{-1}}{2}\right)^2}$$

och vi behöver ta reda på när det som står inom rottecknet är positivt. Låt

$$g(r) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \left(\frac{1 + r^{-1}}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}\left(1 - \frac{r+1}{4}\right).$$

och det är lätt att se att detta är negativt när $r < 3$, noll när $r = 3$ och positivt när $r > 3$.