Metriska rum, $\mathbb{R}$ och p-adiska tal
Problem och lösningar

Tony Johansson
1MA239: Specialkurs i Matematik II
Uppsala Universitet

VT 2018

Problem 1

Genom att bekräfta (i)–(iv) i definitionen av en metrik, visa att om $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en metrik på $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ och $\beta > 0$ är reella tal och $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ så är

$$D(x, y) = \alpha d(x_1, y_1) + \beta d(x_2, y_2)$$

en metrik på $\mathbb{R}^2$.

Lösning

Låt $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$ vara tre punkter i $\mathbb{R}^2$. Det är lätt att se att $D(x, y) \geq 0$, eftersom $\alpha, \beta, d(\cdot, \cdot) \geq 0$. Vi har

$$D(x, y) = \alpha d(x_1, y_1) + \beta d(x_2, y_2) = \alpha d(y_1, x_1) + \beta d(y_2, x_2) = D(y, x).$$

Vi har $D(x, y) = 0$ om och endast om $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2) = 0$, men eftersom d är en metrik händer det om och endast om $x_1 = y_1$ och $x_2 = y_2$, det vill säga $x = y$.

Triangelolikheten håller också:

$$\begin{aligned} D(x, z) &= \alpha d(x_1, z_1) + \beta d(x_2, z_2) \\ &\leq \alpha(d(x_1, y_1) + d(y_1, z_1)) + \beta(d(x_2, y_2) + d(y_2, z_2)) \\ &= D(x, y) + D(y, z). \end{aligned}$$

Detta visar att D är en metrik på $\mathbb{R}^2$.

Problem 2

Visa att Minkowskiavståndet på $\mathbb{R}^2$ inte är en metrik för $p = 1/2$, det vill säga att om $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ så är

$$d(x, y) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}\right)^2$$

inte en metrik.

Ledtråd: Hitta ett exempel på punkter så att inte alla kraven (i)–(iv) i metrikdefinitionen håller.

Lösning

Låt $x = (0, 0), y = (1, 1), z = (0, 1)$. Då är

$$D(x, y) = 4, D(y, z) = 1, D(x, z) = 1,$$

så $D(x, y) > D(x, z) + D(y, z)$, vilket bryter mot triangelolikheten.

Problem 3

(a) Visa att om p är ett primtal så är $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ för alla heltal x, y.

(b) Anta att p *inte* är ett primtal, det vill säga $p = rs$ för heltal $r, s > 1$. Ge exempel på (ändliga) heltal x, y sådana att $|xy|_p < |x|_p|y|_p$.

Lösning

(a) Låt x_0, y_0 och m, n vara heltal sådana att $x = x_0 p^m, y = y_0 p^n$, där p inte delar x_0 eller y_0. Då är $xy = x_0 y_0 p^{m+n}$, och p delar inte $x_0 y_0$. Vi har

$$|xy|_p = p^{-m-n} = p^{-m}p^{-n} = |x|_p|y|_p.$$

(b) Om $p = rs$ så är

$$|r|_p = 1, |s|_p = 1, |rs|_p = \frac{1}{rs}.$$

Problem 4

Anta att d är en metrik i ett metriskt rum (S, d) som uppfyller den *starka triangelolikheten*

$$d(x, z) \le \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

Visa att om $x, y, z \in S$ så gäller minst en av följande likheter:

$$d(x, y) = d(y, z), \quad d(x, y) = d(x, z), \quad d(x, z) = d(y, z)$$

Lösning

Anta att $d(x, y) \geq d(y, z) \geq d(x, z)$. Då är

$$d(y, z) \leq d(x, y) \leq \max\{d(y, z), d(x, z)\} = d(y, z),$$

så likhet gäller.

Problem 5

Visa att mängden av heltal $\mathbb{Z}$ med den p-adiska metriken (ni får välja ett specifikt p om det underlättar) uppfyller den starka triangelolikheten, alltså att

$$|x - z|_p \leq \max\{|x - y|_p, |y - z|_p\}$$

för alla $x, y, z \in \mathbb{Z}$. (Detta är sant för hela Q_p, men ni behöver bara visa det för $\mathbb{Z}$).

Ledtråd: Låt a, b, m, n vara sådana att $x - y = ap^m, y - z = bp^n$, där a, b ej är delbara med p. Dela in i fall beroende på om $m = n$ och vad summan $a + b$ är.

Lösning

Låt a, b, m, n vara som i ledtråden. Om $m \neq n$ kan vi anta att $m > n$, och

$$x - z = (x - y) + (y - z) = ap^m + bp^n = p^n \left(ap^{m-n} + b\right).$$

Eftersom p ej delar $ap^{m-n} + b$ har vi

$$|x - z|_p = p^{-n} = \max\{p^{-n}, p^{-m}\} = \max\{|x - y|_p, |y - z|_p\}.$$

Anta att $m = n$. Då är $x - z = (a + b)p^m$. Det är möjligt att p delar $a + b$, men eftersom $|a + b|_p \leq 1$ har vi (enligt Problem 3)

$$|x - z|_p = |a + b|_p |p^m|_p \leq p^{-m} = \max\{|x - y|_p, |y - z|_p\}.$$