Ramseyteori – Problem med Lösningar

Tony Johansson

16 januari 2018

Problem 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(a)	B	R	R	B	R	B	B	R	B
(b)	B	B	R	R	R	B	R	B	R
(c)	R	R	B	R	R	B	B	R	R
(d)	B	R	R	B	B	R	R	B	R
(e)	B	R	B	B	R	B	R	R	B

Tabell 1: Exempel på färgläggningar av $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

En av talföljderna i Tabell 1 bevisar att $W(3) > 8$. Vilken?
(**Ledtråd:** Använd uteslutningsmetoden. Svaret är inte (a), eftersom 2, 5, 8 är en röd 3-AT med alla tal i $\{1, 2, \ldots, 8\}$.)

Lösning

En färgning bevisar att $W(3) > 8$ om den inte innehåller någon enfärgad 3-AT i $\{1, 2, \ldots, 8\}$.

De enfärgade talföljderna i $\{1, 2, \ldots, 8\}$ för de olika färgningarna är:

(a) 1,4,7 och 2,5,8,

(b) 3,4,5,

(c) 2,5,8,

(d) inga enfärgade talföljder,

(e) 2,5,8.

Svaret är alltså (d). Notera att talföljder som involverar 9 inte är relevanta i detta problemet.

Problem 2

(a) (3p) Visa olikheten $5c + c_3 \leq 325$ i beviset av Lemma 1.

(b) (5p) Visa att de två talföljderna $(5a + c_1, 5b + c_2, 5c + c_3)$ och $(5a + c_3, 5b + c_3, 5c + c_3)$ (ekvation (2) och (3)) är aritmetiska talföljder.

Lösning

(a) Vi har $c = 2b - a$ där $0 \leq a < b \leq 32$, vilket direkt ger $c \leq 64$. På samma sätt är $c_3 = 2c_2 - c_1 \leq 5$ eftersom $1 \leq c_1 < c_2 \leq 3$. Detta ger $5c + c_3 \leq 5 \cdot 64 + 5 = 325$.

(b) Vi börjar med $(5a + c_1, 5b + c_2, 5c + c_3)$. Vi behöver visa att

$$(5c + c_3) - (5b + c_2) = (5b + c_2) - (5a + c_1).$$

Genom att flytta om termerna är detta ekvivalent med

$$5c + c_3 = 5(2b - a) + (2c_2 - c_1),$$

och $c = 2b-a$ och $c_3 = 2c_2 - c_1$ per definition, så talföljden är aritmetisk. På samma sätt visar vi att $(5a + c_3, 5b + c_3, 5c + c_3)$ är aritmetisk.

Problem 3

(a) (2p) Bland de $2^5 = 32$ möjliga färgläggningarna av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ge exempel på sex stycken som innehåller en enfärgad 3-AT.

(b) (2p) Visa att bland de $2^5 = 32$ möjliga färgläggningarna av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, finns exakt 14 som *inte* innehåller en enfärgad 3-AT.
(**Ledtråd:** Lista de 7 följder som börjar med B. De resterande 7 följer från symmetri.)

(c) (4p) Utan att nödvändigtvis ha löst (b), förklara hur (b) kan användas för att visa att

$$W(3) \leq 5(2 \cdot 14 + 1) = 145.$$

Lösning

(a) Tabell 2 visar de 9 färgningar som ger en röd 3-AT. Genom att invertera färgerna fås de 9 färgningar som ger en blå 3-AT.

1	2	3	4	5
R	R	R	R	R
R	R	R	R	B
R	R	R	B	R
R	R	R	B	B
B	R	R	R	R
B	R	R	R	B
R	B	R	R	R
B	B	R	R	R
R	B	R	B	R

Tabell 2: Färgningar av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ som ger en enfärgad 3-AT.

1	2	3	4	5
R	R	B	R	R
R	R	B	R	B
R	R	B	B	R
R	B	R	R	B
R	B	R	B	B
R	B	B	R	R
R	B	B	R	B

Tabell 3: Färgningar av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ som inte ger en enfärgad 3-AT.

(b) Tabell 3 visar de 7 färgningar som börjar med R och inte innehåller någon enfärgad 3-AT. Resterande 7 fås genom att invertera färgerna.

(c) Välj en godtycklig färgning av $\{1, 2, \ldots, 145\}$ i 2 färger. Låt $B_0, B_1, \ldots, B_{29}$ vara blocken $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, etc. Om något av blocken innehåller en enfärgad 3-AT är vi klara. Om inte, så har blocken $B_0, B_1, \ldots, B_{14}$ färgats i en av 14 färgningar som inte ger någon enfärgad 3-AT. Brevlådeprincipen säger att det måste finnas $0 \leq a < b \leq 14$ sådana att B_a, B_b har exakt samma färgföljd. Resten av beviset följer nu som tidigare.

Problem 4

Visa att för heltal $a > b \geq 2$ är

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \binom{a}{b}.$$

(Denna identitet håller mer generellt.)
(**Ledtråd:** $\binom{a}{b}$ anger antalet sätt att välja b element ur en mängd av storlek a.)

Lösning 1

Anta att vi ska välja b element från en mängd av storlek a. Säg att mängden är $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$. Vi delar upp valen i de som innehåller x_a och de som inte gör det. Antalet sätt att välja b element där ett av elementen är x_a är samma som antalet sätt att välja $b-1$ element från $\{x_1, x_2, \ldots, x_{a-1}\}$. Antalet sätt att välja b element utan att ha med x_a är samma som antalet sätt att välja b element från $\{x_1, x_2, \ldots, x_{a-1}\}$. Detta visar att

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}.$$

Lösning 2

Vi kan också ignorera ledtråden och visa identiteten algebraiskt. Vi har

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(a-b)!(b-1)!} + \frac{(a-1)!}{(a-b-1)!b!} \\
&= \frac{(a-1)!b + (a-1)!(a-b)}{(a-b)!b!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+a-b)}{(a-b)!b!} \\
&= \frac{a!}{(a-b)!b!} \\
&= \binom{a}{b}.
\end{aligned}$$

Problem 5

Använd Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)$$

för att visa att

$$\binom{2k}{k} \sim \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}},$$

alltså att

$$\lim_{k\to\infty} \binom{2k}{k} \frac{\sqrt{\pi k}}{4^k} = 1.$$

Lösning

Vi har

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}.$$

Stirlings formel ger

$$\begin{aligned} (2k)! &= \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{2\pi \times 2k}(1+\varepsilon_{2k}), \\ k! &= \left(\frac{k}{e}\right)^{k} \sqrt{2\pi k}(1+\varepsilon_{k}). \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} \binom{2k}{k} \frac{\sqrt{\pi k}}{4^k} = &\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{2\pi \times 2k}(1+\varepsilon_{2k}) \\ &\times \left(\frac{e}{k}\right)^{2k} \frac{1}{2\pi k} \frac{1}{(1+\varepsilon_k)^2} \frac{\sqrt{\pi k}}{4^k} \\ = &\frac{1+\varepsilon_{2k}}{(1+\varepsilon_k)^2}, \end{aligned}$$

vilket går mot 1 då $k \to \infty$.